

유체-구조 연성 해석을 위한 common-refinement 기반 불일치 격자 경계면에서의 정보 전달 기법 연구

The study of data transfer method between non-matching meshes interface
using common-refinement method for fluid-structure interaction

한상호^{1*}, 이창수¹, 김종암¹
서울대학교 기계항공공학부¹

초 록

본 연구는 유체-고체 연성 해석이 활발히 진행되고 있는 고체로켓의 3차원 연소실 상경계면 형상에 대해 정보 전달 기법 중 하나인 common-refinement 기법의 적용을 목적으로 수행되었다. 기법 구현은 상경계면에 common surface를 구성하고 특정 error norm을 최소화 시키는 minimization 내삽법을 적용하는 과정으로 수행되었다. 이를 바탕으로 다양한 다차원 상경계면 형상에서 연속 및 불연속 함수를 이용한 정보 전달 실험을 수행하였고, 다른 기법들과 해석 결과를 비교하였다.

ABSTRACT

During multi-physics or multi-phase simulations accompanying fluid-structure thermal interaction, data transfer problems always arise along non-matching interfaces caused by different computational meshes for each physical domain. Common-refinement scheme, among many available methods, is attractive since it is known to yield conservative and accurate data transfer for non-matching interface cases. This is particularly important in simulating compressible unsteady fluid-structure thermal interaction inside solid propellant rockets, where grid size along solid-fluid interfaces is substantially different. From this perspective, we examine performances of common-refinement-based data transfer scheme between structured quadrilateral (structure part) and unstructured triangular (fluid part) meshes by comparing computed results with other data transfer methods.

Key Words : 유체-구조 연성(fluid-structure interaction), 정보 전달 기법(data transfer scheme), common-refinement 기법(common-refinement method), 불일치 경계면(non-matching interface)

1. 서 론

최근 각광받고 유체-구조 연성 해석은 유동에 의해 구조 변형이 지속적으로 발생하는 물리 현상의 전산해석을 위한 연구 분야이다. 유체-구조 연성 해석은 다물리 해석 기법으로 그 적용분야가 매우 광범위하며 그 중 군사 및 우주 추진체의 보조 로켓으로 사용 범위가 넓은 고체 로켓의 연소실은 추진제 연소에 의한 고온, 고압의 연소가스 발생과 유동 압력에 의한 추진제 그레인의 구조 변형 등 복잡한 물리 현상을 갖기 때문에 유체-구조 연성 해석이 필수적이다. 고체 로켓 유

체영역에서는 충격파 등과 같이 상태변수의 불연속 영역이 존재하는 물리적 현상이 빈번하게 발생하고 점성 경계층 포착을 위해 매우 작은 격자의 간격을 요구한다. 이에 반해 추진제 및 로켓 부속의 변형 해석을 위한 구조해석에 있어서는 유동 해석에 비해 상대적으로 큰 크기의 해석 격자를 사용하더라도 원하는 물리 현상을 포착할 수가 있다. 따라서 유체영역은 고체영역에 비해 상대적으로 조밀한 격자를 필요로 하는 영역이 존재하게 되고 결국 유체와 구조 두 영역의 상경계면에서 격자가 서로 일치하지 않는 불일치 경

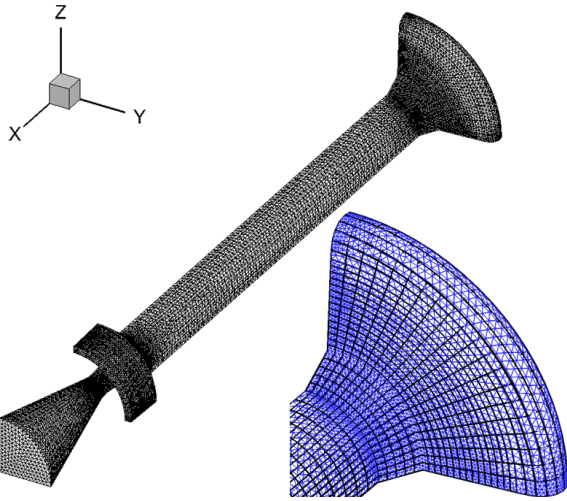


Fig. 1 Non-matching meshes on solid rocket combustion chamber surface : Fluid mesh indicated in blue and structure mesh in black

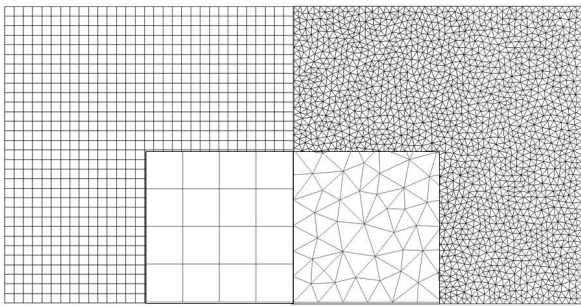


Fig. 2 Example of Structured quadrilateral mesh and unstructured triangular mesh

계면이 형성된다.(1) 이와 같은 불일치 경계면을 통해 전달되는 물리량 정보는 유체, 구조 해석에 매우 큰 영향을 미치게 된다. 특히, 고체 로켓 내부 해석은 고온, 압축성 유체 유동으로 인해 발생하는 불연속적인 압력 정보가 전달되므로 정보 전달의 정확성과 보존성을 만족 시키는 정보 전달 기법의 적용이 매우 중요하다.

정보 전달 기법 중 common-refinement 기법(이하 C-R 기법)은 불일치 경계면 상에 서로 다른 두 격자의 기하학적 특성을 동시에 참조하는 common surface를 구성하고, common surface 상에서 특정 error norm을 최소화 시키는 수치 적분법을 이용해 정보 보간법을 수행한다. 따라서 정보 전달의 정확성과 보존성 두 만족 시키는 기법이다.(2)

본 연구는 Fig. 1 에 도시된 3차원 고체 로켓 연

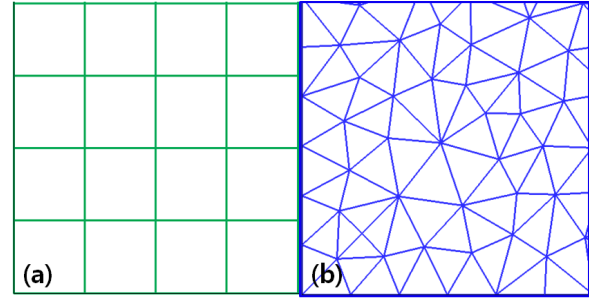


Fig. 4 (a) Source mesh, (b) Target mesh

소실 내부의 유체-구조 연성 해석을 위한 common-refinement 기반의 불일치 격자 간 정보 전달 기법 개발 및 정확성 및 보존성 확인을 목적으로 수행되었다.

2. Common-refinement 기법 구현

2.1 Common surface 구성

2.1.1 사용 격자

본 연구에서는 실제 고체 로켓의 유체-구조 연성 해석 시 발생할 수 있는 상황을 가정하여 common surface를 구성하였다. 즉, 구조 부분 표면에서 사각형 격자, 유체 부분 표면은 삼각형 비정렬 격자로 가정하였다. Fig. 2는 본 연구에서 가정한 사각형 정렬 격자, 삼각형 비정렬 격자 사용에 의한 격자 불일치의 예이다.

2.1.2 격자점 투사

Common surface를 구성하기 위해 원천격자점과 목표격자점을 각각 상대편 격자 표면에 투사하는 과정이 필요하다. 격자점 투사 방향은 격자점을 포함하고 있는 격자 요소평면들의 법선벡터 평균으로 정의된다. 투사되는 위치는 상대 격자 평면과 투사 방향 벡터의 교점으로 정해진다.⁽³⁾

Common surface는 원천격자와 목표격자에 투사된 각각의 격자점들을 선형 결합하여 얻는 common 점들로 구성된다. 따라서 두 격자의 기하학적 특성을 동시에 만족시키며 식으로 표현하면 다음과 같다.⁽³⁾

$$\alpha S + \beta T \equiv \{x = \alpha S + \beta T(s) | s \in S\} \quad (1)$$

식 (1)에서 α 와 β 는 음이 아닌 상수이며 $\alpha + \beta = 1$ 을 만족시켜야 한다. Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 불일치 경계면을 측면에서 본 단면도와 입체도이다. Fig. 3의 (a)는 원천격자점과 목표격자점의 투사 방향과 투사 후 평균 선형 결합하여 생성한 common surface를 나타낸다. 사각형-삼각형 격자

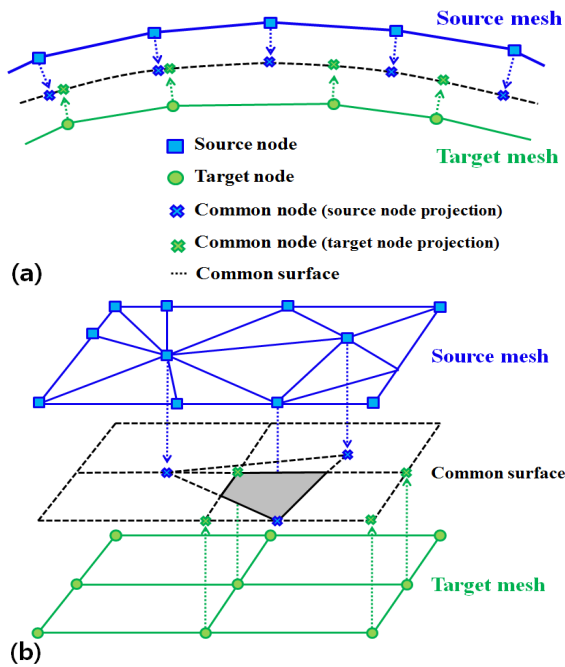


Fig. 3 Mesh node projection of non-matching interface : (a) Sectional view, (b) Projection view

로 생성되는 common surface의 subfacets은 다양한 다각형 형상으로 구성될 수 있음을 Fig. 3의 (b)에 나타내었다.

2.1.3 Subfacets 구성

Common surface 상의 subfacets을 구성하기 위해 common 점들을 원천격자와 목표격자의 형상 정보를 이용해 선분으로 연결한다. 예를 들어 Fig. 4의 (a), (b)와 같이 삼각형 격자가 원천격자이고 사각형 격자가 목표격자라면 각 격자에서 투사된 해당 common 점들은 삼각형 형상, 사각형 형상으로 선분이 연결된다. 즉, Fig. 5 (b)와 같이 common surface 상에 투사된 격자점들이 두 격자를 겹쳐놓은 Fig. 5의 (a)와 같은 형상으로 연결되어야 한다. 그 후 원천격자 형상으로 구성된 요소 중 하나를 기준요소로 정하고 목표격자 형상으로 구성된 요소들을 배경요소로 정의한다. 다음으로 기준요소와 겹치는 배경요소들을 선별한 후 기준요소의 선분과 겹치는 배경요소 선분의 교차점을 찾아 common 점으로 포함시킨다. 마지막으로 기준요소의 한 점을 시작점으로 설정, 기준요소 선분을 따라 시계방향으로 진행하면서 교차점을 만날 경우 해당 배경요소의 선분으로 변경하여 진행한다. 이때 주의해야 할 사항은 기준요소의 한 점이 겹치는 배경요소의 선분

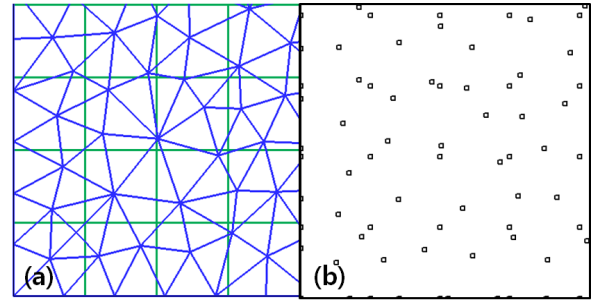


Fig. 5 (a) Overlap of source and target meshes, (b) Common nodes after nodes projection

상에 위치할 때 계속 기준요소 선분을 따라 진행할지, 배경요소 선분으로 변경할지 판단해줘야 한다. 기준요소와 겹치는 모든 배경요소들에 대해 동일한 과정을 수행하면 해당 기준요소 상의 subfacets 구성이 완료된다. 이를 원천격자 형상의 모든 요소들에 대해 동일하게 수행하면 common surface 상의 모든 subfacets를 구성할 수 있다. Fig. 6은 subfacets 구성 과정을 도식화 한 것이며, 삼각형 기준요소에 사각형 배경격자 4개가 겹치는 경우를 나타낸다. 기준요소의 시작점은 그림에서 파란 원으로 표시되어 있다. 이와 같은 과정을 통해 구성한 subfacets은 Fig. 7의 (a)와 같다.

2.1.3 Subfacets 구성

Common surface 상의 subfacets을 구성하기 위해 common 점들을 원천격자와 목표격자의 형상 정보를 이용해 선분으로 연결한다. 예를 들어 Fig. 4의 (a), (b)와 같이 삼각형 격자가 원천격자이고 사각형 격자가 목표격자라면 각 격자에서 투사된 해당 common 점들은 삼각형 형상, 사각형 형상으로 선분이 연결된다. 즉, Fig. 5 (b)와 같이 common surface 상에 투사된 격자점들이 두 격자를 겹쳐놓은 Fig. 5의 (a)와 같은 형상으로 연결되어야 한다. 그 후 원천격자 형상으로 구성된 요소 중 하나를 기준요소로 정하고 목표격자 형상으로 구성된 요소들을 배경요소로 정의한다. 다음으로 기준요소와 겹치는 배경요소들을 선별한 후 기준요소의 선분과 겹치는 배경요소 선분의 교차점을 찾아 common 점으로 포함시킨다. 마지막으로 기준요소의 한 점을 시작점으로 설정, 기준요소 선분을 따라 시계방향으로 진행하면서 교차점을 만날 경우 해당 배경요소의 선분으로 변경하여 진행한다. 이때 주의해야 할 사항은 기준요소의 한 점이 겹치는 배경요소의 선분

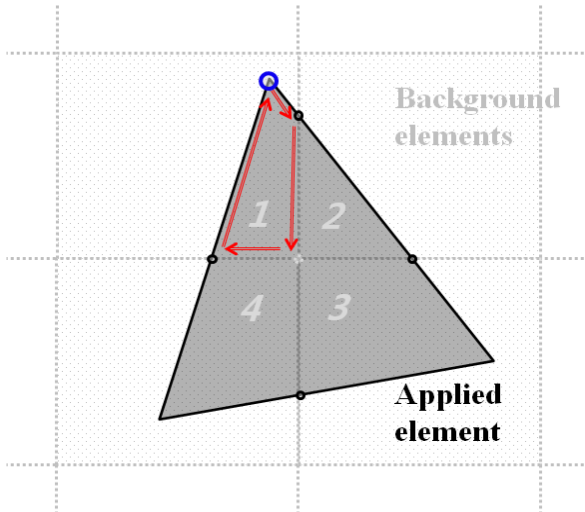


Fig. 6 Determining subfacets

상에 위치할 때 계속 기준요소 선분을 따라 진행할지, 배경요소 선분으로 변경할지 판단해줘야 한다. 기준요소와 겹치는 모든 배경요소들에 대해 동일한 과정을 수행하면 해당 기준요소 상의 subfacets 구성이 완료된다. 이를 원천격자 형상의 모든 요소들에 대해 동일하게 수행하면 common surface 상의 모든 subfacets를 구성할 수 있다. Fig. 6은 subfacets 구성 과정을 도식화 한 것이며, 삼각형 기준요소에 사각형 배경격자 4개가 겹치는 경우를 나타낸다. 기준요소의 시작점은 그림에서 파란 원으로 표시되어 있다. 이와 같은 과정을 통해 구성한 subfacets은 Fig. 7의 (a)와 같다.

2.1.4 Subfacets 삼각화

삼각형-사각형의 불일치 격자일 경우 subfacets 형상이 다양한 다각형 형상으로 구성된다. 따라서 수치적분을 통한 정보 내삽 과정에서 필요한 형상함수를 찾기 힘들다. 이 문제를 해결하기 위해 모든 subfacets을 삼각형으로 나누어 주면 삼각 형상함수만으로 정보 내삽을 수행할 수 있다. 이 과정에서 나뉘는 삼각형의 폭이 너무 좁거나 넓으면 적분과정에서 오차가 발생할 가능성이 있다. 따라서 subfacets의 내각 중 가장 둔각을 선정하고 마주 보는 subfacets 점들로 새로운 선분을 생성, 삼각형을 구성하는 방법을 적용하였다. Fig. 7의 (b)는 Fig. 7의 (a)의 subfacets을 삼각화 한 결과이다.

2.2 정보 내삽법

2.2.1 L2 minimization

유체-구조 연성 계산에서 전달되는 정보는 편미

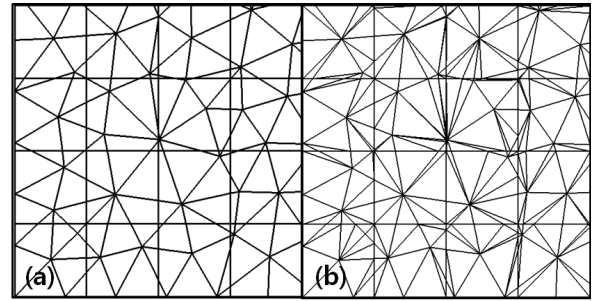


Fig. 7 (a) Subfacets on common surface, (b) Subfacets after triangulation

분방정식 형태로 가정할 수 있다. 일반적으로 편미분 방정식의 근사해의 정량적인 표현은 internal form으로 나타나므로 L2 norm을 이용한 내삽법 적용이 가능하다.

L2 minimization은 주고받는 정보의 차이의 L2 norm을 최소화시킨다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 dx}{\partial g_i} = 0 \quad (2)$$

식 (2)를 Reyleigh-Ritz-Galerkin 방법으로 표현하면,

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 dx}{\partial g_i} = 2 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx g_j - 2 \int_{\Omega} \psi_i f dx \quad (3)$$

식 (3)에서 ψ_i 는 목표격자점의 형상함수, g_i 는 목표격자점으로 전달되는 정보량, f 는 원천격자의 정보량이다. $M = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx$, $b = \int_{\Omega} \psi_i f dx$, $x = g_i$ 로 정의하면 식 (3)을 $Mx = b$ 의 행렬식으로 표현할 수 있다.

2.2.2 Sobolev minimization

L2 minimization 내삽법을 이용하여 불연속 함수 형태의 정보를 전달 할 경우 Gibb's 현상이 발생한다. 이 문제는 특히 고체 로켓 연소실 내부 유동처럼 충격과 발생으로 인한 불연속 압력 정보 전달 시 정확성을 크게 저하시킨다. 따라서 수치 진동을 감쇠시키는 sobolev norm을 적용한다. 본 연구에서는 1차 sobolev norm을 최소화 시켜 정보 내삽을 수행하였다. 1차 sobolev norm은 전달 정보 함수와 형상함수의 1차 미분항을 L2 norm에 추가하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{\partial \int_{\Omega} (g-f)^2 + \alpha (g' - f')^2 dx}{\partial g_i}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^n g_i \int_{\Omega} \psi_i \psi_j + \alpha \psi_i' \psi_j' dx - 2 \int_{\Omega} \psi_i f + \alpha \psi_i' f' dx \quad (4)$$

식 (4)에서 α 는 임의의 상수로 α 값에 따라 수치 진동 감소량이 달라진다. 지나치게 큰 값은 정보 전달 정확성을 저하시키므로 상황에 따라 적절한 값을 적용시켜야 한다.

2.3 Common-refinement 기법 구현 검증

2.3.1 사용 격자 및 정보 전달 함수
Common-refinement 기법의 구현 검증은 참고논문의 조건과 동일한 격자와 정보 전달 함수를 사용해 수행하였다.⁽²⁾ 정보 전달 함수로는 peaks 함수를 이용하였다. Peaks 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} peaks(x, y) &= 3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-x^2-y^2} \\ &\quad - \frac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

2.3.2 반복 계산

실제 유체-구조 연성 해석에서는 정보 전달이 반복적으로 수행되므로 본 연구에서도 정보 전달 함수를 이용해 반복 계산을 수행하여 유체-구조 연성 해석을 모사하였다.

2.3.3 기법 구현 결과

C-R기법 구현 검증을 위해 상대오차 계산을 수행하였다. 상대오차 계산 수식은 다음과 같다.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \frac{|g_i - g_i^{exact}|^2}{|g_i^{exact}|^2} \quad (6)$$

식 (6)에서 ϵ 는 L2 norm을 의미한다.

반복 계산 횟수 2^9 번으로 수행한 결과는 Fig. 8과 같다. Fig. 9는 본 연구에서 회 반복 계산을 수행한 결과이다. Fig. 8과 Fig. 9를 통해 본 연구에서 개발된 C-R 기법의 정보 전달 기법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

3. 정보 전달 실험 결과 및 비교

3.1 평판 형상 불연속 함수 정보 전달 실험

두 개의 평판 격자 사이에서 불연속 함수의 정보 전달 실험을 수행하였다. 두 격자의 크기는, x축 y범위 $[-3, 3]$, $[-3, 3]$ 로 동일하다. 불연속 함수는 x축 범위 $[-3, -1.5]$, $[1.5, 3]$ 에서 0, $[-1.5, 0]$ 에서 2, $[0, 1.5]$ 에서 -2 값을 갖는다. 정보 전달의 보존 오차는 다음 식으로 산출 한다.

$$\epsilon_c = \frac{\left| \sum_{i=1}^n g_i^{exact} - \sum_{i=1}^n g_i \right|}{\left| \sum_{i=1}^n g_i^{exact} \right|} \quad (7)$$

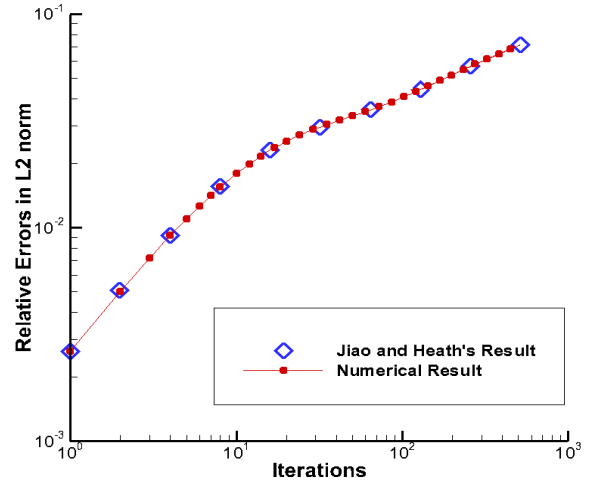


Fig. 8 Comparison relative errors in repeated transfer of peaks function between Jiao and Heath's data and numerical result

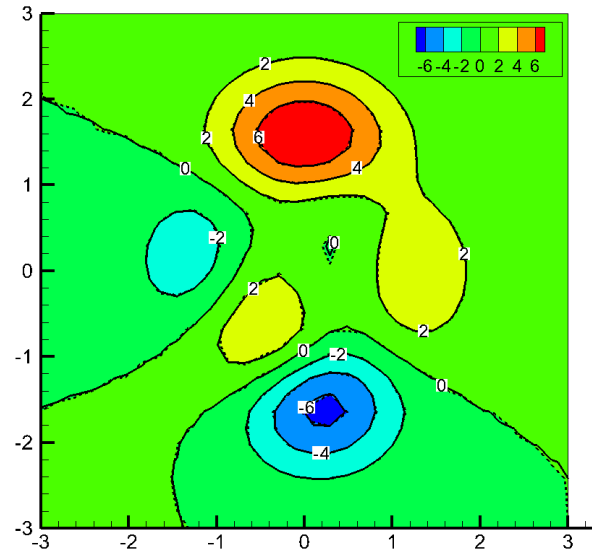


Fig. 9 Contour of peaks function after 2^5 iterations : Exact solution indicated in solid line and numerical result in dashed line

식 (7)에서 $|\cdot|$ 는 L1 norm을 의미한다.

각 정보 전달 기법들의 계산 시간은 consistent 내삽법 계산 시간을 기준으로 하여 Table. 1로 나타내었다.

Fig. 10의 (a), (b)는 각각 정보 전달 반복 회수 2^9 동안의 상대오차와 보존오차를 나타낸다. Fig. 10의 (a)에서 반복 횟수가 증가함에 따라 C-R 기법의 상대오차 증가량이 타 기법에 비해 적음을 알 수 있다. Fig. 10의 (b)를 통해 C-R 기법의 보존오차는 유지되는 반면 타 기법의 보존오차는

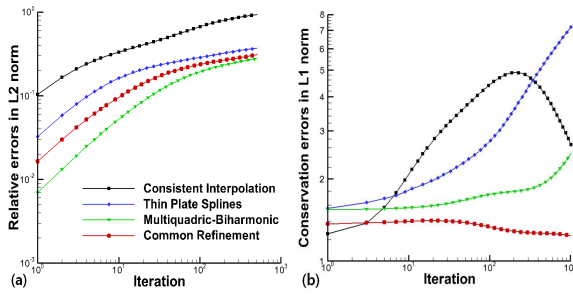


Fig. 10 Repeated discontinuous function data transfer : (a) Relative errors, (b) Conservation errors

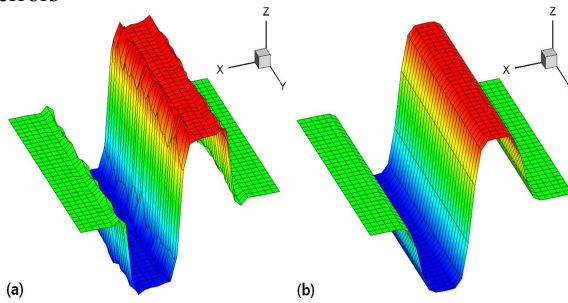


Fig. 11 Contour of discontinuous function after 2^5 iterations : (a) Multiquadric-biharmonic, (b) Common-refinement using Sobolev minimization

증가하는 경향을 확인 할 수 있었다. 이와 같은 결과는 정보 보존성을 만족하는 C-R 기법의 특징으로 설명 가능하며 반복 정보전달 계산 시 장점으로 작용한다.

Fig. 11의 (a), (b)는 각각 2^5 회 반복계산 후 MQ 기법과 Sobolev minimization을 사용한 C-R 기법의 결과이다. Fig. 11을 통해 2차 형상함수를 사용하는 MQ 기법은 불연속 지점에서 Gibbs 현상을 발생시킴을 확인할 수 있으며 L2 minimization을 적용한 C-R 기법의 결과에서도 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 이를 통해 Sobolev minimization을 적용한 C-R 기법에서 수치 진동이 감소됨을 확인할 수 있다.

3.2 고체로켓 형상 불연속 함수 전달 실험

본 연구의 최종 적용 대상인 3차원 고체로켓 연소실 형상에서 연속 함수 전달 실험을 수행했다. 3차원 고체로켓 연소실 상경계면은 Fig. 1와 같이 평판 형상과 원통 곡면 형상이 복합적으로 적용되며, 모서리와 같이 형상이 급격히 변하는 부분이 존재하므로 강건한 common surface 구성이 요구된다. 격자점 개수 327×17 의 정렬 사각형 격자와 392×20 정렬 격자를 삼각화 시킨 비정렬

Table. 1 Normalized execution time

Consistent interpolation	Thin plate splines	Multiquadric-biharmonic	Common-refinement
1	9.74	10.68	16.34

격자를 이용하여 실험을 수행하였으며 전달 함수는 다음 식 (8)과 같고 이로 인한 분포를 Fig 12에 도시하였다.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{10}{1+e^{(-5z-1)}}, & (0.0 \leq z < 60.5) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-3)}}, & (60.5 \leq z < 121.0) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-5)}}, & (121.0 \leq z < 181.5) \\ \frac{10}{1+e^{(-5z-7)}}, & (181.5 \leq z < 242.0) \end{cases} \quad (8)$$

2^3 회 반복 계산 후의 상대오차와 보존오차 결과는 Fig. 13과 같다. 불연속 함수 전달 실험에서 C-R 기법은 정확성과 보존성 측면에서 타 기법보다 월등히 좋은 결과를 도출하였다. TPS와 MQ 기법은 반복 계산 초기부터 진동이 매우 크게 발생하며 정확성과 보존성 모두 만족 시키지 못하지만 C-R 기법은 그나마 비교 가능한 consistent 내삽법보다 상대오차 적층이 적어 높은 정확성을 확보했으며, 보존성을 월등히 만족시키는 결과를 도출하였다. Fig. 14는 2^6 회 반복 계산 후의 L2 & Sobolev minimization 방법의 결과 비교이며 차이를 확인하기 위하여 좌표 변환 후의 좌표계에서 도시하였으며 이를 통해 Sobolev 방법이 수치 진동을 효과적으로 억제함을 확인할 수 있다.

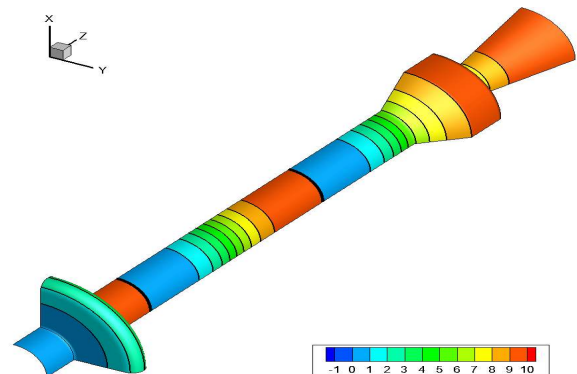


Fig. 12 3-D discontinuous exponential function : Contour of function value on 3-D rocket combustion chamber interface

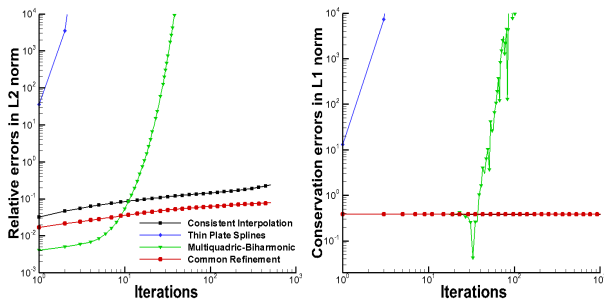


Fig. 13 Repeated discontinuous function data transfer : relative errors & conservation errors

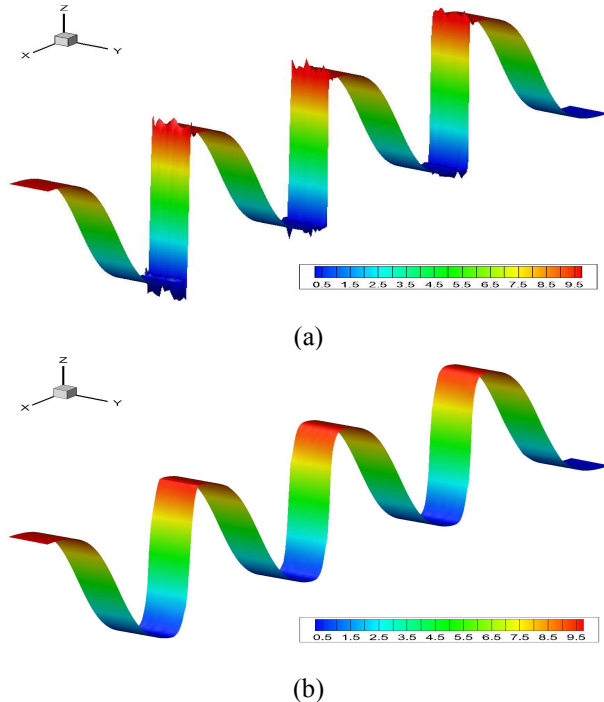


Fig. 14 Common-refinement data transfer result of repeated transfer of 3-D discontinuous exponential function after 2^6 iterations : (a) L2 minimization, (b) Sobolev minimization

4. 결 론

평면 형상, 불연속 함수 형태의 정보 전달 실험에서 C-R 기법은 타정보 전달 반복 횟수가 증가함에도 정확성을 유지하였다. 정보 보존성 측면에서도 보존오차가 일정하게 유지되는 반면 타 기법은 오차가 증가되어 보존성을 만족시키지 못함을 알 수 있었다. 또한 Sobolev minimization을 적용해 수치 진동을 감쇠시킬 수 있었다.

C-R 기법의 장점은 실제 고체로켓 유체-구조 연성 해석 과정 형상을 모사한 불연속 함수 전달 실험에서도 동일하게 확인되었다. 불연속 함수 전달 실험에서 consistent 내삽법은 불연속 지점에

서 오차가 집중적으로 발생하여 회 반복 계산 후 본래 함수 형상을 완전히 상실하였다. TPS와 MQ 기법은 연속 함수 전달과 동일하게 매우 큰 진동을 발생시켜 정확성과 보존성 모두 만족시키지 못하였다. 반면, Sobolev minimization 방법을 적용한 C-R 기법은 불연속 지점의 수치 진동을 효과적으로 감쇠시키며 연속 부분의 형상을 유지, 오차를 최소화 시켰다.

C-R 기법의 상대오차는 다른 기법에 비해 적층이 적어 정확성을 가장 잘 만족시켰으며, 보존성을 거의 완벽하게 만족시키는 장점이 유지되었다. 이를 바탕으로 실제 유체-구조 연성 해석 시 정보 전달 기법으로 TPS와 MQ 기법 사용은 무리가 있으며, C-R 기법 적용이 가장 적절하다고 판단된다.

후기

본 연구는 교육과학기술부의 우주기초원천기술개발 사업(NSL, National Space Lab, No. 2011-0029871) 및 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 국가수리과학연구소의 주요사업(No. A21001)으로부터 지원을 받아 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Han, S., Kim, C., 2012, "A full burning FSI simulation of solid propellant rocket interior", 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA, AIAA-2012-0038, Nashville, Tennessee
- (2). Jiao X., Heath MT., 2004, "Common-refinement based data transfer between nonmatching meshes in multiphysics simulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.61, pp.2402-2427.
- (3) R. K. Jaiman, X. Jiao, P. H. Geubelle and E. Loth, 2006, "Conservative load transfer along curved fluid-solid interface with non-matching meshes", *Journal of Computational Physics*, Vol.218, pp.372-397